

LES GROUPES DE MATHIEU SONT-ILS AUSSI SPORADIQUES QU'IL Y PARAÎT ?

LABIB HADDAD

*À Yves Sureau, guide avisé, de haute
montagne, au pays des hypergroupes.*

Abstract. *This is a plea for the reopening of the building site for the classification of finite simple groups in order to include the finite simple hypergroups.*

Hypergroups were first introduced by Frédéric Marty, in 1934, at a Congress in Stockholm, not to be confused with a later and quite different notion to which the same name was given, inopportunately.

I am well aware that, probably, quite a few mathematicians must have already felt uncomfortable about the presence of the so-called sporadic simple groups in the large tableau of the classification of finite simple groups, and might have wrote about it, though I do not have any reference to mention.

In what follows, I will try to explain, step by step, what a hypergroup is, and, then, suggest a notion of simplicity for hypergroups, in a simple and natural way, to match the notion in the case of groups, hoping it will be fruitful.

Examples and constructions are included.

INTRODUCTION

Ce qui suit est un plaidoyer pour la réouverture du chantier de classification des groupes simples finis afin d'y inclure les hypergroupes simples finis.

La notion d'hypergroupe a été introduite par Frédéric Marty, en 1934, lors d'un congrès à Stockholm, à ne pas confondre avec une notion plus tardive et tout à fait différente à laquelle on a, malencontreusement, donné le même nom.

Je suis bien conscient qu'un bon nombre de mathématiciens ont déjà dû se sentir mal à l'aise au sujet de la présence de ce que l'on nomme *les groupes simples sporadiques* dans le grand tableau de la classification, et certains ont même pu le coucher par écrit, bien que je ne puisse mentionner aucune référence.

Dans ce qui suit, on va commencer par rappeler, pas à pas, ce qu'est un hypergroupe puis comment y introduire la simplicité de manière simple (et utile) et qui coïncide avec la notion classique, dans le cas des groupes.

On élabore en donnant une manière très générale pour la construction d'hypergroupes et l'on donne des conditions pour qu'ils soient simples. On fournit de nombreux exemples et caractérisations

On pose enfin la question : «À peine clos, le chantier de la classification des **groupes** simples finis devra-t-il, éventuellement, rouvrir ses portes afin d'entreprendre la classification des **hypergroupes** simples finis ?»

QUELQUES DÉFINITIONS

Un hypergroupe est un ensemble muni d'une opération binaire associative **multivalente** dont les propriétés généralisent celles des groupes.

Plus précisément, une **opération binaire multivalente** sur un ensemble donné H est une application $(x, y) \mapsto x.y$ qui, à chaque couple d'éléments $(x, y) \in H \times H$, fait correspondre une **partie** $x.y \subset H$.

Pour $X \subset H$ et $Y \subset H$, on désigne alors par $X.Y$ la réunion de toutes les parties $x.y$ où x parcourt X et y parcourt Y .

Le maniement des opérations multivalentes nécessite un tout petit effort d'attention de plus que l'usage des opérations classiques, univalentes, n'en demande, mais l'habitude finit par estomper la difficulté.

Lorsque le risque de confusion est minime, on écrit, simplement, $x.Y$ au lieu de $\{x\}.Y$ et, de même, $X.y$ au lieu de $X.\{y\}$. Enfin, si une des parties $x.y$ est un singleton, au lieu de $x.y = \{z\}$, on écrit plus simplement $x.y = z$ et on retrouve l'écriture classique des opérations binaires *univalentes*.

Définition. Un **hypergroupe** est un ensemble non vide, H , muni d'une opération binaire multivalente qui vérifie les deux identités suivantes, pour tous x, y, z dans H ,

$$\begin{aligned} x.(y.z) &= (x.y).z : \text{associativité.} \\ x.H &= H = H.x : \text{reproductivité.} \end{aligned}$$

Ces deux propriétés impliquent que $(x.y).H = x.(y.H) = x.H = H$, de sorte que le produit $x.y$ n'est jamais vide.

Bien entendu, tout groupe est un hypergroupe dont l'opération est univalente. Réciproquement, tout hypergroupe dont l'opération est univalente est un groupe puisqu'alors, pour chaque couple (a, b) donné, les équations $a.x = b$ et $y.a = b$ possèdent des solutions en x et en y .

Un exemple élémentaire. Soient G un groupe, H l'un quelconque de ses sous-groupes et soit $G/H = \{xH : x \in G\}$ l'ensemble des *classes à droite* de G modulo H .

L'ensemble $xHyH$ est la réunion des classes à droite $xyhH$ où h parcourt H . En posant $(xH).(yH) = \{xhyH : h \in H\}$, on définit une opération binaire multivalente sur l'ensemble G/H qui en fait un hypergroupe, comme on le vérifie sans détour.

Cette opération est univalente si et seulement si H est un sous-groupe invariant de G : dans ce cas l'hypergroupe G/H est le groupe quotient classique de G par H . Lorsque le sous-groupe H n'est pas invariant dans G , on obtient alors un exemple *élémentaire* d'un hypergroupe qui n'est pas un groupe.

Traditionnellement, on appelle **D-hypergroupe** tout hypergroupe isomorphe à un hypergroupe de classes à droite de la forme G/H .

Morphismes. Un **morphisme** est alors, par définition, une application $f : H \rightarrow K$ d'un hypergroupe H dans un hypergroupe K qui vérifie l'identité d'homomorphisme, $f(x.y) = f(x).f(y)$.

On appelle **isomorphisme** entre H et K toute application **bijective** $f : H \rightarrow K$ qui est un morphisme ainsi que sa réciproque f^{-1} . Comme dans le cas des groupes, un morphisme bijectif $f : H \rightarrow K$ est (déjà) un isomorphisme car, dans ce cas, f^{-1} est aussi un morphisme. En effet, pour $a = f(x)$ et $b = f(y)$, on aura $x.y = f^{-1}f(x.y) = f^{-1}(f(x).f(y))$, autrement dit, $f^{-1}(a).f^{-1}(b) = f^{-1}(a.b)$.

Bien entendu, lorsque H et K sont des groupes, on retrouve ainsi les notions classiques d'homomorphismes et d'isomorphismes de groupes.

Nombres premiers et groupes simples. Comme pour la primalité, il y a deux manières équivalentes de définir la simplicité.

Un entier $n \geq 0$ est **premier** lorsqu'il a exactement deux diviseurs : cela revient à dire qu'il est seulement multiple de deux entiers distincts.

Un groupe est **simple** lorsqu'il a exactement deux sous-groupes invariants : cela revient à dire qu'il possède seulement deux images homomorphes distinctes, à isomorphisme près.

Afin d'étendre aux hypergroupes la notion de simplicité, il faut trouver un substitut convenable à la notion *d'image homomorphe* d'un groupe. Voici ce que nous proposons.

Reflets et simplicité. On dira que l'hypergroupe K est un **reflet** de l'hypergroupe H lorsqu'il existe une application **surjective** $f : H \rightarrow K$ qui vérifie les identités suivante :

$$f^{-1}f(x.y) = f^{-1}(f(x).f(y)) = x.f^{-1}f(y) = f^{-1}f(x).y.$$

On dira alors que l'application f est un **réflecteur**.

Tout réflecteur f est nécessairement un morphisme. En effet, f étant surjective, on a $f(x.y) = f f^{-1}f(x.y) = f f^{-1}(f(x).f(y)) = f(x).f(y)$.

On observera aussi, sans détour, qu'une application $f : H \rightarrow K$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un réflecteur injectif.

Bien entendu, si H est un groupe, l'hypergroupe K est un reflet du groupe H si et seulement si c'est une image homomorphe de H .

Chaque hypergroupe H possède toujours, naturellement, les deux reflets suivants : lui-même et l'hypergroupe **trivial** à un seul élément ;

ces deux reflats sont isomorphes si et seulement si H lui-même est trivial.

On dira qu'un hypergroupe est **simple** lorsqu'il possède (à isomorphisme près) exactement deux reflats. Cette manière de procéder permet d'éviter les *arcanes* de la théorie des sous-hypergroupes. On peut espérer que cette nouvelle notion soit un bon choix.

Il est clair qu'un groupe donné est simple si et seulement si c'est un «hypergroupe simple». La classe des hypergroupes simples finis contient ainsi celle des groupes simples finis. Elle la contient, **et la prolonge** : voir, en effet, la conséquence (5) ci-dessous.

Invariance. On aura besoin de la définition suivante. Etant donné un groupe G ainsi que deux sous-groupes H et K , on dira que le sous-groupe K est **invariant modulo H** lorsque l'on a

$$(*) \quad KxK = HxK = KxH, \text{ pour tout } x \in G.$$

Cela généralise la notion classique de sous-groupe invariant car, bien entendu, un sous-groupe est invariant (au sens classique) si et seulement s'il est invariant modulo le sous-groupe trivial.

On observera, en passant aux inverses, que chacune des deux conditions suivantes est équivalente à l'autre :

$$KxK = HxK, \text{ pour tout } x \in G,$$

$$KxK = KxH, \text{ pour tout } x \in G.$$

Chacune d'elles est ainsi équivalente à la condition (*). En outre, lorsque K est invariant modulo H , on a nécessairement $H \subset K$ puisque, pour $x \in K$, la condition $HxK = KxK$ entraîne $HK = K$. La condition (*) peut donc s'énoncer également comme ceci :

$$(*) \quad H \subset K \text{ et } Kx \subset HxK, \text{ pour tout } x \in G.$$

Théorème. Soient G un groupe, H et K deux quelconques de ses sous-groupes. Si K est invariant modulo H , le D -hypergroupe G/K est un reflet du D -hypergroupe G/H . Réciproquement, tout reflet de G/H est isomorphe à l'un de ces D -hypergroupes G/K où K est invariant modulo H .

Afin de ne pas couper le fil de l'exposé, nous renvoyons la démonstration de ce théorème à l'APPENDICE ci-dessous.

CONSÉQUENCES

1. Tout reflet d'un D-hypergroupe est donc un D-hypergroupe.
2. Le D-hypergroupe G/H est simple si et seulement si H est distinct de G et que les seuls sous-groupes K de G invariants modulo H sont G et H lui-même.
3. En particulier, le D-hypergroupe G/H est simple dès lors que H est un sous-groupe **maximal** dans G .
4. Ainsi, lorsque H est un sous-groupe maximal du groupe G et qu'il n'est **pas invariant** dans G , l'hypergroupe G/H est simple et n'est **pas un groupe**.
5. **Il existe donc des hypergroupes simples finis qui ne sont pas des groupes.**

CLASSES À GAUCHE

On définit, semblablement, l'hypergroupe $H \backslash G = \{Hx : x \in G\}$ des classes à gauche modulo H . Les hypergroupes isomorphes à ces hypergroupes de classes à gauche possèdent les mêmes propriétés, corrélatives, que les D-hypergroupes. Par exemple, $H \backslash G$ est un groupe si et seulement si H est invariant dans G et, s'il en est ainsi, les deux groupes G/H et $H \backslash G$ coïncident, bien entendu. De même, étant donnés deux sous-groupes $H \subset K \subset G$, l'hypergroupe $K \backslash G$ est un reflet de $H \backslash G$ si K est invariant modulo H .

Le théorème et ses conséquences se transposent, corrélativement. En particulier $H \backslash G$ est simple si et seulement si G/H l'est.

HYPERGROUPE OPPOSÉ

Soit H un hypergroupe avec son opération $(x, y) \mapsto x.y$. Comme dans le cas des opérations univalentes, on définit l'opération **opposée** $(x, y) \mapsto x \circ y = y.x$. Muni de cette nouvelle opération, H est de nouveau un hypergroupe que l'on désigne par H° et que l'on appelle **l'hypergroupe opposé**.

Que dire de l'hypergroupe $(G/H)^\circ$ opposé d'un hypergroupe G/H ?

Théorème. Soient G un groupe et H un de ses sous-groupes.

- (1) Les deux hypergroupes $(G/H)^\circ$ et $H \backslash G$ sont isomorphes.
- (2) D'un autre côté, pour que les deux hypergroupes G/H et $H \backslash G$ soient isomorphes, il faut et il suffit que H soit un sous-groupe invariant dans G .

Autrement dit, lorsque le sous-groupe H n'est pas invariant, les deux hypergroupes G/H et $H \backslash G$ ne sont **pas isomorphes**. Lorsque le sous-groupe H est invariant, G/H et $H \backslash G$ sont un seul et même **groupe** quotient.

Démonstration. (1) Plus précisément, l'application $Hx \mapsto (Hx)^{-1}$ qui, à chaque classe à droite $Hx \in H \backslash G$, fait correspondre la classe à gauche $(Hx)^{-1} = x^{-1}H \in G/H$ est un isomorphisme de l'hypergroupe $H \backslash G$ sur l'hypergroupe opposé $(G/H)^\circ$, comme une simple vérification le montre.

(2) Si H est invariant, alors G/H et $H \backslash G$ sont, tous deux, le même groupe quotient classique de G par H .

Réciproquement, soit $f : G/H \rightarrow H \backslash G$ un isomorphisme entre ces deux hypergroupes. Dans chacun d'eux, H est la seule classe qui vérifie l'identité $H.H = H$. On a donc $f(H) = H$. De plus, quelque soit $x \in G$, on a $(xH).H = xH$ dans l'hypergroupe G/H . Pour chaque $y \in G$, il existe $x \in G$ tel que $f(xH) = Hy$. On aura alors

$$Hy = f(xH) = f((xH).H) = f(xH).f(H) = (Hy).H.$$

Ainsi, dans $H \backslash G$, le produit $(Hy).H = Hy$ est un singleton : cela revient à dire que $HyH = Hy$, de sorte que $Hy \subset yH$ **pour tout** $y \in G$, donc H est invariant. \square

ILS VONT PAR PAIRES

Soit K un sous-groupe d'un groupe donné G . Si l'hypergroupe G/K est simple, on sait que l'hypergroupe $K \backslash G$ est également simple. Lorsque, de plus, ce ne sont pas des groupes, on sait qu'ils ne sont pas isomorphes. Ainsi, **comme les racines imaginaires conjuguées d'un polynôme réel, ces hypergroupes simples vont par paires !**

En particulier, en prenant tous les couples (G, K) où K est un sous-groupe maximal, non invariant, d'indice **fini**, dans un groupe G , on

obtient une famille de paires d'hypergroupes simples finis $(G/K, K \setminus G)$, deux à deux opposés et non isomorphes : cette famille **prolonge** ainsi la famille des **groupes cycliques simples finis**.

LES PLUS SIMPLES DES EXEMPLES

On prend pour G le groupe de toutes les permutations d'un ensemble E non vide, fini ou infini, ayant α pour cardinal. On distingue un point particulier $p \in E$ et on prend $H = \{s \in G : s(p) = p\}$, le sous-groupe des permutations qui laissent le point p fixe. C'est un sous-groupe maximal de G . Pour $\alpha \geq 3$, ce sous-groupe H n'est pas invariant, de sorte que $K = G/H$ est alors un D-hypergroupe simple qui n'est **pas un groupe** et dont le cardinal est celui de E . En désignant par e la classe $H \in K$, on vérifie aisément que sa table de multiplication se résume alors ainsi :

$$\begin{aligned} x.e &= x, \text{ pour tout } x \in K, \\ x.y &= K \setminus \{x\}, \text{ pour } y \neq e. \end{aligned}$$

On observera encore ceci : pour tout $x \neq e$, on a

$$x^2 = x.x = K \setminus \{x\} \text{ et } x^3 = x.x.x = K.$$

Ainsi, contrairement au cas des groupes, *l'ordre* de chacun de ces hypergroupes *monogènes* est toujours égal à **trois** et ne coïncide avec son cardinal que pour $\alpha = 3$.

En particulier, en prenant pour α , successivement, chacun des entiers $n \geq 3$, on obtient une suite de D-hypergroupes simples finis ayant n éléments et qui ne sont **pas des groupes**.

UN PAS DE PLUS

Le procédé de construction des hypergroupes de classes, à droite ou à gauche, de la forme G/H ou $H \setminus G$, peut être grandement étendu en une **large généralisation** que voici.

On se donne un ensemble T , une partie $C \subset T \times T$ ainsi qu'une opération binaire univalente, $\text{Op} : C \rightarrow T$, **partiellement** définie, pour les seuls couples $(x, y) \in C$ que l'on appellera les couples **composables**. Le plus souvent, on écrira simplement xy au lieu de $\text{Op}(x, y)$ et on dira que (T, C) est une **trame**.

Soit R une relation **d'équivalence** sur l'ensemble T et, pour chaque élément $x \in T$, soit \bar{x} sa classe modulo R . On définit alors une opération multivalente (naturelle) sur l'ensemble des classes T/R , de la manière suivante :

$$\bar{z} \in \bar{x}.\bar{y} \iff (\exists(u, v) \in C)(uv \in \bar{z}).$$

On dira que (T, C, R) est une **présentation** de la **structure quotient** T/R et, lorsque T/R est un hypergroupe, on dira que la relation R est **adéquate**.

On peut donner, facilement, des conditions nécessaires et suffisantes pour que la relation d'équivalence R soit adéquate, sous la forme d'un ensemble d'énoncés *du premier ordre*. Il n'est pas besoin de rentrer dans le détail, ici. Voir, pour cela, l'APPENDICE ci-dessous. Pour le moment, il suffit de savoir que ces conditions explicites existent.

UNE HEUREUSE CIRCONSTANCE

Bien entendu, chaque hypergroupe de classes, de la forme G/H ou $H \backslash G$, possède une présentation *naturelle* dont la trame est (T, C) où $T = G$ est le groupe lui-même, $C = G \times G$, (i.e., tous les couples sont composables, l'opération étant celle du groupe). La relation d'équivalence R est définie par

$$xRy \iff x^{-1}y \in H,$$

respectivement,

$$xRy \iff yx^{-1} \in H.$$

Plus généralement donc, chaque hypergroupe isomorphe à l'un quelconque de ces hypergroupes de classes possède également une présentation. Cette particularité n'est, cependant, pas due à une quelconque singularité de ces hypergroupes. Elle est le lot de tous les hypergroupes, quels qu'ils soient. Voici comment.

Tout hypergroupe possède une présentation

En effet, soit H un hypergroupe quelconque et $T = H \times H \times H \times H$. À chaque triplet $t = (x, y, z) \in H \times H \times H$ pour lequel $z \in x.y$, on associe le couple *composable* $((x, t), (y, t)) \in T \times T$ et on pose $\text{Op}((x, t), (y, t)) = (z, t)$: cela définit une opération $\text{Op} : C \rightarrow T$ où C est l'ensemble de tous les couples composables. On obtient ainsi la trame (T, C) . On prend pour R la relation d'équivalence sur T dont les

classes sont les parties $\{x\} \times H \times H \times H$. On vérifie, sans détour, que T/R est un hypergroupe isomorphe à l'hypergroupe donné H . **cqfd**

UNE NOUVELLE FAMILLE D'EXEMPLES

Voici une première illustration du procédé de présentation qui fournit des hypergroupes qui ne sont pas des D-hypergroupes.

On prend un ensemble K réunion d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles non vides, deux à deux disjoints. On suppose que $0 \in I$ et on distingue un point particulier $e \in A_0$. On introduit l'ensemble T formé de toutes les applications **injectives** $f : X \rightarrow K$ où $e \in X \subset K$ et vérifiant la condition suivante : il existe (au moins) une permutation $s : I \rightarrow I$ telle que l'on ait, pour tout $i \in I$,

$$f(X \cap A_i) \subset A_{s(i)}.$$

On dira que le couple (f, g) formé de deux éléments $f : X \rightarrow K$ et $g : Y \rightarrow K$ de T est composable lorsque l'on a $g(e) \in X$ et on prend pour composé fg l'application $y \mapsto f(g(y))$ définie sur la partie $Y \cap g^{-1}(X)$: cette application, on le voit sans détour, appartient bien à T .

On obtient, ainsi, une trame (T, C) . L'application $f \mapsto f(e)$ de T dans K est surjective et définit une relation d'équivalence R sur T dont les classes d'équivalences sont les parties $\bar{x} = \{f \in T : f(e) = x\}$.

L'application $x \mapsto \bar{x}$ permet d'identifier l'ensemble T/R des classes modulo R à l'ensemble K lui-même. L'opération multivalente correspondant à la présentation (T, C, R) de $T/R = K$ est donnée par

$$z \in x.y \iff (\exists (f, g) \in C)(f(e) = x, g(e) = y, f(y) = z).$$

On en établit facilement la table de multiplication sous la forme suivante : quels que soient $a_i \in A_i$, pour chaque indice i ,

$$\begin{aligned} x.e &= x, \text{ pour tout } x \in K, \\ a_i.y &= A_i \setminus \{a_i\}, \text{ pour tout } y \in A_0 \setminus \{e\}, \\ a_i.a_j &= K \setminus A_i, \text{ pour tout indice } j \neq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $I = \{0\}$, $K = A_0$, on reconnaît l'exemple du D-hypergroupe simple déjà rencontré plus haut.

Plus généralement, si toutes les parties A_i ont même cardinal, K est encore un D-hypergroupe.

En effet, on le voit facilement en introduisant une nouvelle trame G , une sous-trame de la trame de départ T . Du fait que les parties A_i sont équipotentes, chaque élément f de T se prolonge en un élément g de T qui est une application bijective $g : K \rightarrow K$, autrement dit, une permutation de l'ensemble K . Ce prolongement n'est cependant pas nécessairement unique. L'ensemble $G \subset T$ formé de toutes ces **permutations** de K est un groupe. On désigne par S la restriction de l'équivalence R au sous-ensemble G et par H le sous-groupe de G formé des permutations qui laissent fixe le point e . On vérifie, sans grand détour, que la structure T/R est isomorphe à la structure G/S elle-même isomorphe au D-hypergroupe G/H . **cqfd**

On trouvera davantage de précisions au sujet de ces structures dans l'APPENDICE, ci-dessous.

Pour le moment, on notera, cependant, encore ceci : pour $I = \{0, 1\}$, $|A_0| = n \geq 3$, $|A_1| \geq 3$, $n \neq p$, on obtient une structure à $n + p$ éléments qui est un hypergroupe, mais **pas un** D-hypergroupe : voir le **A5** de l'APPENDICE.

SCHOLIE

On va explorer les liens qui peuvent exister entre deux présentations ayant une même trame (T, C) .

On se donne deux relations d'équivalence R et S sur l'ensemble T . On désigne, respectivement, par \bar{x} et \hat{x} la classe de x modulo R et la classe de x modulo S . On a ainsi deux présentations, (T, C, R) et (T, C, S) , de la structure quotient T/R et de la structure quotient T/S , respectivement, qui sont munies des opérations multivalentes correspondantes :

$$\bar{z} \in \bar{x}.\bar{y} \iff (\exists(u, v) \in (\bar{x} \times \bar{y}) \cap C)(uv \in \bar{z}),$$

$$\hat{z} \in \hat{x}.\hat{y} \iff (\exists(u, v) \in (\hat{x} \times \hat{y}) \cap C)(uv \in \hat{z}).$$

Bien entendu, lorsque $R \subset S$, on a $\bar{x} \subset \hat{x}$ et, dans ce cas, $\bar{x} \mapsto \hat{x}$ est une application surjective $f : T/R \rightarrow T/S$, $f(\bar{x}) = \hat{x}$. De plus, il

suffit de se reporter aux définitions pour constater que l'on aura alors, toujours, l'inclusion

$$f(\bar{x}.\bar{y}) \subset \hat{x}.\hat{y}.$$

Pour avoir l'égalité

$$f(\bar{x}.\bar{y}) = \hat{x}.\hat{y},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} (**) ((u, v) \in (\hat{x} \times \hat{y}) \cap C) &\implies \\ (\forall (p, q) \in \hat{x} \times \hat{y})(\exists (r, s) \in (\bar{p} \times \bar{q}) \cap C) &(\widehat{rs} = \widehat{uv}). \end{aligned}$$

Pour examiner plus attentivement cette situation, commençons par lui donner un nom commode : convenons de dire que l'équivalence S est **invariante modulo R** lorsque l'on a $R \subset S$ et que la condition précédente, $(**)$, est satisfaite pour tous x, y dans T .

Supposons donc que S soit invariante modulo R . Il va en découler **trois** conséquences importantes.

1. Pour tous x, y, z dans T , on aura

$$f^{-1}f(\bar{x}.\bar{y}) = f^{-1}(f(\bar{x}).f(\bar{y})) = \bar{x}.f^{-1}f(\bar{y}) = f^{-1}f(\bar{x}).\bar{y}.$$

2. Si R est adéquate, il en sera de même de S . Autrement dit, si T/R est un hypergroupe, T/S sera un reflet de T/R car f est alors un réflecteur d'après **1**.

3. En particulier, si T/R est un groupe, T/S sera une image homomorphe de T/S .

Démonstration.

1. Du fait de l'égalité

$$f(\bar{x}.\bar{y}) = \hat{x}.\hat{y} = f(\bar{x}).f(\bar{y}),$$

on a aussi

$$f^{-1}f(\bar{x}.\bar{y}) = f^{-1}(f(\bar{x}).f(\bar{y})).$$

Par définition, on a

$$f(\bar{x}) = \hat{x}, \quad f(\bar{y}) = \hat{y}.$$

Il nous faut établir l'identité

$$f^{-1}(f(\bar{x}).f(\bar{y})) = \bar{x}.f^{-1}f(\bar{y})$$

qui s'écrit donc

$$f^{-1}(\hat{x}.\hat{y}) = \bar{x}.f^{-1}(\hat{y}).$$

On procède par implications et équivalences successives. On a

$$\bar{z} \in f^{-1}(\hat{x}.\hat{y}) \iff \hat{z} \in \hat{x}.\hat{y} \iff \exists (u, v) \in (\hat{x} \times \hat{y}) \cap C \text{ tel que } uv \in \hat{z},$$

$$\bar{z} \in \bar{x}.f^{-1}(\hat{y}) \iff \exists t \in \hat{y} \text{ et } \exists (u, v) \in (\bar{x} \times \bar{t}) \cap C \text{ tel que } uv \in \bar{z}.$$

Or,

$$t \in \hat{y} \text{ et } (u, v) \in (\hat{x} \times \hat{t}) \cap C \implies (u, v) \in (\hat{x} \times \hat{y}) \cap C,$$

donc

$$\bar{z} \in \bar{x}.f^{-1}(\hat{y}) \implies \bar{z} \in f^{-1}(\hat{x}.\hat{y}).$$

Pour la réciproque, on utilise la condition $(**)$ sous la forme suivante :

$$t \in \hat{y} \text{ et } (u, v) \in (\hat{x} \times \hat{y}) \cap C \implies \exists (r, s) \in (\bar{x} \times \bar{t}) \cap C \text{ tel que } \widehat{rs} = \widehat{uv},$$

donc

$$\bar{z} \in f^{-1}(\hat{x}.\hat{y}) \implies \bar{z} \in \bar{x}.f^{-1}(\hat{y}).$$

D'où l'égalité annoncée

$$f^{-1}(f(\bar{x}).f(\bar{y})) = \bar{x}.f^{-1}f(\bar{y}).$$

On étalait de même, l'égalité

$$f^{-1}(f(\bar{x}).f(\bar{y})) = f^{-1}f(\bar{x}).\bar{y}.$$

Cela démontre le point **1**.

2. Si T/R est un hypergroupe, il en va de même de T/S du fait que f est surjective et vérifie l'identité

$$f(\bar{x}.\bar{y}) = \hat{x}.\hat{y} = f(\bar{x}).f(\bar{y}).$$

En effet, l'opération multivalente de T/S est alors **associative** car celle de T/R l'est :

$$(\hat{x}.\hat{y}).\hat{z} = f(\bar{x}.\bar{y}).f(\bar{z}) = f(\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}) = f(\bar{x}).f(\bar{y}.\bar{z}) = \hat{x}.\hat{y}.\hat{z}.$$

De même, elle possède également la propriété de **reproductibilité** comme pour T/R .

Cela démontre le point **2** dont découle immédiatement le point **3**. \square

On aura remarqué, sans doute, la similitude avec la démonstration faite au **A1** de l'APPENDICE pour le cas particulier des D-hypergroupes.

On en vient, à présent, à la généralisation complète suivante du théorème qui caractérise les reflats des D-hypergroupes.

Théorème. Soit (T, C, R) une présentation d'un hypergroupe H quelconque. Tout reflat L de H possède une présentation (T, C, S) où S est une équivalence invariante modulo R .

Démonstration. Soient $p : T \rightarrow h = T/R$ la projection de T sur l'ensemble quotient, $h : H \rightarrow L$ un réflecteur et S l'équivalence sur T définie par l'application composée $g = hp$, autrement dit,

$$xSy \iff h(p(x)) = h(p(y)).$$

L'hypergroupe L est ainsi identifié à l'hypergroupe T/S présenté par (T, C, S) . On adopte les notations précédentes, en posant

$$\bar{x} = p(x) \text{ , } \hat{x} = h(p(x)).$$

On va montrer que S vérifie la condition (**). On se donne

$$(u, v) \in (\hat{x} \times \hat{y}) \cap C \text{ et } (p, q) \in \hat{x} \times \hat{y}.$$

On a ainsi

$$\hat{p} = \hat{x}, \hat{q} = \hat{y} \text{ et } \widehat{uv} \in \hat{x}.\hat{y} = h(\bar{p}.\bar{q}).$$

Puisque h est un réflecteur, il existe z tel que $\bar{z} \in \bar{p}.\bar{q}$ et $\hat{z} = \widehat{uv}$. Cela veut dire qu'il existe $(r, s) \in (\bar{p} \times \bar{q}) \cap C$ tel que $\bar{z} = \bar{r}\bar{s}$ et, par suite, $\widehat{rs} = \hat{z} = \widehat{uv}$. \square

Corollaire. Soit (T, C, R) une présentation d'un hypergroupe H non trivial. Cet hypergroupe H est **simple** si et seulement si les deux seules équivalences invariantes modulo R sont l'équivalence totale $T \times T$ et R elle-même.

Une remarque. Insistons :

tout hypergroupe possède une présentation à l'aide d'une trame convenable.

La démonstration donnée plus haut établit, en fait, le résultat encore plus général que voici. Soit H un ensemble muni d'une opération multivalente quelconque : autrement dit, certains des produits $x.y$ peuvent être **vides** et l'opération n'a nul besoin d'être associative, ni reproductive. La construction donnée plus haut fournit une trame (T, C) et une relation d'équivalence R sur T telles que (T, C, R) soit une présentation de H , autrement dit, H est isomorphe à la structure quotient T/R .

On peut concevoir cette présentation comme un **déploiement** de l'opération multivalente sur H en une opération univalente sur T , mais partiellement définie. Ce que l'on gagne en simplicité, en passant du multivalent à l'univalent, on le perd, un tout petit peu, en passant d'une opération partout définie à une opération uniquement définie pour certains couples : le mal n'est pas si grand car cela sous-tend la notion d'une opération univalente *générale* pour laquelle certains produits $x.y$ au lieu d'être des singletons, seraient simplement **vides**.

Dans ce déploiement, chaque élément x de H est, pour ainsi dire, **éclaté** en une partie de T .

On peut aussi concevoir cette présentation comme un **revêtement** de la structure H par la structure (T, C) , un peu comme pour les variétés topologiques.

Cette façon de faire est loin d'être rare. Elle est illustrée par de très nombreux exemples. Citons-en uniquement deux : le revêtement d'un groupe de Lie connexe par un groupe de Lie simplement connexe, et la représentation d'un ensemble analytique de la droite réelle par la projection d'un fermé du plan. Les chemins qui ne se distinguent pas très bien dans le groupe, se voient bien plus clairement une fois relevés dans le revêtement. De même, le schéma (complexe) de Souslin qui définit l'ensemble analytique est déployé, à l'aide du fermé du plan, comme une nappe froissée et entortillée que l'on étend sur une corde à linge.

Bien entendu, le critère de simplicité qu'on vient de donner pour les hypergroupes s'applique à toutes les structures multivalentes ou univalentes. Il s'applique, en particulier, aux groupes : un groupe est simple si et seulement si l'une de ses présentations (T, C, R) , vérifie la condition suivante : les deux seules équivalences invariantes modulo R sont l'équivalence totale $T \times T$ et R elle-même. De plus, s'il en est ainsi, alors **toutes** les présentations du groupe vérifie cette même condition.

La question se pose alors : est-il plus simple d'établir qu'un groupe est simple, directement, en s'y tenant au plus près, ou bien peut-on simplifier la preuve, parfois, en prenant de la hauteur au-dessus du groupe, à l'aide d'une trame convenable ?

CONSTRUCTIONS «à la Utumi»

On se donne un hypergroupe H dont on désigne l'opération par le signe $+$ (même si elle n'est pas nécessairement commutative). On se donne une partition \mathcal{P} de l'ensemble H et, pour chaque $x \in H$, on désigne par \bar{x} la partie de la partition \mathcal{P} à laquelle x appartient (sa «classe»). On suppose que H possède un élément 0 ayant les propriétés

suivantes :

$$\bar{0} = \{0\} , \quad x + 0 = x \quad \text{et} \quad x \in 0 + x \subset \bar{x} \quad \text{pour tout} \quad x \in H.$$

On notera que l'on a alors $0 + \bar{x} = \bar{x}$.

On définit sur H une nouvelle opération multivalente par la règle :

$$x.y = x + \bar{y}.$$

Cette opération est toujours reproductive puisque

$$x.H = x + H = H \quad \text{et} \quad H.x = H + \bar{x} = H.$$

Elle est associative si et seulement si, pour tous x et y , on a

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}.$$

Cela se voit simplement, sans grand détour. On dira alors que cet hypergroupe $(H, .)$ est construit «à la Utumi» à partir de l'hypergroupe $(H, +)$ et de la partition \mathcal{P} .

L'exemple de Utumi.

Voici le premier exemple de cette construction, donné en 1949 par Utumi [7]. On prend pour H le groupe cyclique d'ordre huit :

$$H = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et la partition formée des trois classes :

$$I = \{0\}, \quad A = \{1, 4, 7\} \quad \text{et} \quad B = \{2, 3, 5, 6\}.$$

Les conditions précédentes, édictées pour la construction, étant satisfaites, $(H, .)$ est un hypergroupe. Utumi a montré que ce n'était pas un D-hypergroupe bien qu'il possède la propriété suivante : pour chaque élément fixé $x \in H$, la collection $\{x.y : y \in H\}$ est une partition de H et les cardinaux $|x.y|$ sont tous égaux, pour $y \in H$.

En 1940, Eaton [1] a donné le nom de *cogroupes* (à droite) à cette classe particulière d'hypergroupes et l'hypergroupe H de Utumi en fait partie. Aussi lui a-t-on donné le nom de *cogroupe de Utumi*. Pour plus de détail, on se reportera à [3].

On va établir, ici, le résultat nouveau que voici.

Théorème. *Le cogroupe de Utumi est un hypergroupe simple.*

En effet, soit $f : H \rightarrow K$ un réflecteur et pour chaque partie $X \subset H$, posons $\hat{X} = f^{-1}f(X)$ et, en particulier, $\hat{x} = f^{-1}f(x)$ pour chaque $x \in H$. Les propriétés du réflecteur se traduisent, ici, de la manière suivante :

$$\widehat{x.y} = \hat{x}.\hat{y} = x.\hat{y} = \hat{x}.y.$$

De ce que $x.0 = x$, on tire :

$$\hat{x} = \hat{x}.\hat{0} = x.\hat{0} = \hat{x}0$$

et, en particulier,

$$\hat{0} = \hat{0}.\hat{0} = 0.\hat{0} = \hat{0}.0.$$

Deux cas seulement peuvent se présenter.

Premier cas : $\hat{0} = 0$. Alors, pour chaque x , on a $\hat{x} = x.0 = x$ et f est un isomorphisme.

Second cas : $\hat{0}$ contient un élément $a \neq 0$. Alors $\hat{0}$ contient aussi le produit $0.a = \bar{a}$ donc, également, le produit $\bar{a}.a = \bar{a} + \bar{a}$ ainsi que toutes les sommes $\bar{a} + \bar{a} + \dots + \bar{a}$. Une simple vérification montre que $A + A + A = H$ et $B + B = H$. Donc, quel que soit $a \neq 0$, on voit que l'on a $\hat{0} = H$ et l'hypergroupe K est donc trivial, réduit à un singleton.
cqfd

Plus généralement, et en brochant sur ce même canevas, on obtient donc ceci.

*Un hypergroupe $(H, .)$ construit «à la Utumi», à partir d'un groupe $(H, +)$ et d'une partition \mathcal{P} , est **simple** dès que, pour chacune des parties $A \in \mathcal{P}$, différente du singleton $\{0\}$, l'une au moins des sommes $A + A + \dots + A$ est égale à H .*

APPENDICE

Lorsque l'on traite d'hypergroupes, on adopte souvent une convention tacite : chaque fois que le produit $x.y$ est un singleton, on écrit, indifféremment, $x.y = \{z\}$ ou $x.y = z$, pourvu que le risque de confusion soit minime.

REFLETS D'UN D-HYPERGROUPE

A1. Lemme. *Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G . On suppose que K est invariant modulo H . Le D -hypergroupe G/K est alors un reflet du D -hypergroupe G/H .*

Démonstration. Pour $x \in G$, posons $\bar{x} = xH$. Par hypothèse, H est un sous-groupe de K . En associant à chaque classe $\bar{x} = xH \in G/H$ la classe $\hat{x} = xK \in G/K$, on obtient donc une application surjective canonique $f : G/H \rightarrow G/K$. On va vérifier que f est un réflecteur.

On a $f(\bar{x}) = \hat{x} = xK$, de sorte que

$$f(\bar{x}.\bar{y}) = \{\hat{z} : z \in xHyH\},$$

$$f(\bar{x}).f(\bar{y}) = \hat{x}.\hat{y} = \{\hat{z} : z \in xKyK\},$$

et ces deux ensembles sont égaux.

En effet, soit $z \in xKyK$ alors $z \in xHyK$, puisque $KyK = HyK$; autrement dit, l'intersection $xK \cap (xHy)$ n'est pas vide; soit t un élément de cette intersection; alors $t \in xHyH$ et $zK = tK$. On a ainsi

$$f(\bar{x}.\bar{y}) = f(\bar{x}).f(\bar{y}).$$

De même, on a

$$f^{-1}f(\bar{x}) = f^{-1}(\hat{x}) = \{\bar{z} : z \in xK\},$$

de sorte que

$$f^{-1}f(\bar{x}.\bar{y}) = f^{-1}(f(\bar{x}).f(\bar{y})) = \{\bar{z} : z \in xKyK\},$$

$$f^{-1}f(\bar{x}).\bar{y} = \{\bar{z} : z \in xKyH\},$$

$$\bar{x}.f^{-1}f(\bar{y}) = \{\bar{z} : z \in xHyK\}.$$

Ces quatre ensembles sont égaux et l'application f est donc bien un réflecteur. \square

A2. Deux remarques utiles. Pour établir le lemme suivant, on aura besoin des deux résultats que voici.

R1. Tout réflecteur f vérifie l'identité

$$f^{-1}f(x).f^{-1}f(y) = f^{-1}(f(x).f(y)).$$

En effet, soit $z \in f^{-1}f(x).f^{-1}f(y)$. Il existe alors deux éléments

$u \in f^{-1}f(x)$ et $v \in f^{-1}f(y)$ tels que $z \in u.v$.

On a donc $f(z) \in f(u.v) = f(u).f(v) = f(x).f(y)$.

Autrement dit, on a $f^{-1}f(x).f^{-1}f(y) \subset f^{-1}(f(x).f(y))$.

On conclut en remarquant que

$$f^{-1}(f(x).f(y)) = x.f^{-1}f(y) \subset f^{-1}f(x).f^{-1}f(y). \text{ cqfd}$$

R2. On se donne des hypergroupes, H, K, L , ainsi que des applications, $f : H \rightarrow K$, $g : K \rightarrow L$, et leur composée $h = gf$. Si f et g sont des morphismes, il est clair que h est également un morphisme. Réciproquement, si f et h sont des morphismes, et pourvu que f soit **surjective**, l'application g est aussi un morphisme.

En effet, pour x, y dans K , il existe a, b dans H tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Ainsi $f(a.b) = f(a).f(b) = x.y$ donc

$$g(x.y) = h(a.b) = h(a).h(b) = gf(a).gf(b) = g(x).g(y).$$

Autrement dit, g est bien un morphisme.

cqfd

A3. Lemme. Soient G un groupe, H l'un quelconque de ses sous-groupes et L un reflet du D -hypergroupe G/H . Il existe alors un sous-groupe K de G , invariant modulo H , tel que L soit isomorphe au D -hypergroupe G/K .

Démonstration. Soit $h : G/H \rightarrow L$ un réflecteur. Désignons par e l'élément unité du groupe G puis, pour chaque $x \in G$, posons $\bar{x} = xH$. Soient $1 = h(\bar{e})$ et $K = \{x : h(\bar{x}) = 1\}$. On procède par étapes. On commence par montrer que K est un sous-groupe de G puis on montre qu'il est invariant modulo H et on établit, enfin, que L est isomorphe à l'hypergroupe G/K .

1. Pour $x \in H$, on a $\bar{x} = \bar{e}$, de sorte que $h(\bar{x}) = h(\bar{e}) = 1$. On a donc

$$H \subset K.$$

On commence par utiliser le fait que h est un morphisme.

2. Pour $x \in G$ et $y \in G$, on a $xy \in xHyH$ donc $\overline{xy} \in (xH).(yH) = \bar{x}.\bar{y}$, de sorte que

$$h(\overline{xy}) \in h(\bar{x}.\bar{y}) = h(\bar{x}).h(\bar{y}).$$

3. Pour $x \in G$, on a aussi $\bar{x}.\bar{e} = \bar{x}$ d'où l'on tire $h(\bar{x}).1 = h(\bar{x})$. De sorte que, pour $y \in K$, on a

$$h(\overline{xy}) \in h(\bar{x}).1 = h(\bar{x}) \text{ qui est un singleton, donc } h(\overline{xy}) = h(\bar{x}).$$

4. En particulier, pour $y \in K$, il vient

$$1 = h(\overline{y^{-1}y}) = h(\overline{y^{-1}}) \text{ donc } y^{-1} \in K.$$

5. Plus généralement, si $x \in K$ et $y \in K$, alors

$$h(\overline{x^{-1}y}) = h(\overline{x^{-1}}) = 1 \text{ donc } x^{-1}y \in K,$$

de sorte que

$$K^{-1}K \subset K.$$

Cela prouve bien que K est un sous-groupe de G .

6. En procédant par équivalences successives, on a

$$\bar{z} \in h^{-1}h(\bar{e}) \iff \bar{z} \in h^{-1}(1) \iff h(\bar{z}) = 1 \iff z \in K.$$

Autrement dit

$$\bar{z} \in h^{-1}h(\bar{e}) \iff z \in K.$$

On utilise, à présent, les identités spécifiques aux réflecteurs.

7. On a $h^{-1}h(\bar{x}) = h^{-1}h(\bar{x}.\bar{e}) = \bar{x}.h^{-1}h(\bar{e})$. D'où

$$\begin{aligned} \bar{z} \in h^{-1}h(\bar{x}) &\iff (\exists \bar{u} \in h^{-1}h(\bar{e}))(\bar{z} \in \bar{x}.\bar{u}) \iff \\ (\exists u \in K)(z \in xHuH) &\iff z \in xK. \end{aligned}$$

Ainsi, $h(\bar{z}) = h(\bar{x}) \iff z \in xK$. Il en résulte que l'on a

$$h(\bar{x}) = h(\bar{y}) \iff xK = yK.$$

Il existe ainsi une application $g : G/K \rightarrow L$ qui, à chacune des classes $xK \in G/K$, associe $g(xK) = h(\bar{x}) \in L$ et g est une application **bijec-tive**.

8. On a l'identité $\bar{e}.h^{-1}h(\bar{x}) = h^{-1}h(\bar{e}).h^{-1}h(\bar{x})$, d'après **R1**.

$$\text{Or, } \bar{z} \in \bar{e}.h^{-1}h(\bar{x}) \iff z \in HxK.$$

$$\text{De même, } \bar{z} \in h^{-1}h(\bar{e}).h^{-1}h(\bar{x}) \iff z \in KxK.$$

Donc, pour tout $x \in G$, on a

$$HxK = KxK.$$

Cela achève de prouver que K est invariant modulo H .

9. Soit $f : G/H \rightarrow G/K$ l'application canonique qui fait correspondre, à la classe $xH \in G/H$, la classe $xK \in G/K$. C'est un réflecteur, d'après **A1**. On a $g(f(\bar{x})) = g(xK) = h(\bar{x})$. Autrement dit, h est la composée gf . Or, en particulier, f est un morphisme surjectif et h un morphisme. Donc g est un morphisme, d'après **R2**. Puisque g est bijectif (voir le **7** ci-dessus) c'est donc un isomorphisme, comme annoncé. \square

A4. Conditions d'adéquation. Soient (T, C) une trame et R une relation d'équivalence sur T . Pour chaque $x \in T$, on désignera par \bar{x} sa classe modulo R , de sorte que toutes les relations suivantes sont synonymes :

$$xRy, \ yRx, \ y \in \bar{x}, \ x \in \bar{y}, \ \bar{x} = \bar{y}.$$

Afin de simplifier les écritures, pour $r \in T$ et $s \in T$, on conviendra de ceci : lorsque l'on écrit rs , on suppose (implicitement) que le couple (r, s) est composable, autrement dit, que l'on a $(r, s) \in C$.

Voici deux énoncés relatifs à la structure quotient T/R , (ils sont tous deux du premier ordre) :

$$(1) \ (\forall x \forall y)(\exists r \in \bar{x} \exists s \in T)(rs \in \bar{y}) \text{ et } (\exists r \in T \exists s \in \bar{y})(rs \in \bar{x})\}.$$

$$(2) \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists r \in \bar{x}, s \in \bar{y}, t \in \bar{z})((rs)t \in \bar{u} \iff (\exists r \in \bar{x}, s \in \bar{y}, t \in \bar{z})(r(st) \in \bar{u})).$$

On voit, sans détour, que la condition (1) est nécessaire et suffisante pour assurer la **reproductibilité**. De même, la condition (2) est nécessaire et suffisante pour assurer l'**associativité**.

Autement dit, pour que l'équivalence R soit **adéquate**, il faut et il suffit qu'elle satisfasse les deux énoncés (1) et (2).

SUR LA NOUVELLE FAMILLE D'EXEMPLES

On se donne un ensemble K , réunion d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles non vides, deux à deux disjoints. On suppose que $0 \in I$ et on distingue un point particulier $e \in A_0$.

Sur cet ensemble K , on a défini une opération multivalente dont voici la table : quels que soient $a_i \in A_i$, pour chaque indice i ,

$$\begin{aligned} x.e &= x, \text{ pour tout } x \in K, \\ a_i.y &= A_i \setminus \{a_i\}, \text{ pour tout } y \in A_0 \setminus \{e\}, \\ a_i.a_j &= K \setminus A_i, \text{ pour tout indice } j \neq 0. \end{aligned}$$

Il est clair que la structure ainsi définie sur K dépend, uniquement, à isomorphisme près, de la famille des cardinaux, finis ou infinis, $n = |A_0|$ et, pour $i \neq 0$, $p_i = |A_i|$: on dira qu'elle est de type $S(n, (p_i))$. Cela généralise, quelque peu, les structures de type $S(n, p)$, correspondant au cas où l'on a $|I| \leq 2$, introduite dans l'article [2].

A5. Lorsque l'on a $n \geq 3$, $p_i \geq 3$, pour tout indice i , et $p_k \neq n$, pour un indice k , la structure est un hypergroupe qui n'est pas un D-hypergroupe.

En effet, pour voir que la structure est un hypergroupe, il suffit de s'assurer que les conditions d'adéquation sont satisfaites.

Pour la condition de reproductibilité, la vérification est sans détour.

Quant à la condition d'associativité, on reprend la trame (T, C) qui sert à construire la structure. Soient alors a_i, a_j, a_k , donnés dans K ainsi que r, s, t , dans T tels que $r(e) = a_i$, $s(e) \in a_j$, $t(e) \in a_k$. Si $(r, s) \in C$

et $(rs, t) \in C$, on voit, simplement, que l'on a $(s, t) \in C$ et $(r, st) \in C$, de sorte que $((rs)t)(e) = (r(st))(e)$.

Réciproquement, soit $(s, t) \in C$ et $(r, st) \in C$. Ainsi, $s(t(e)) = s(a_k)$ est défini, de même que $r(s(a_k)) = a_l$. On montre qu'il existe alors un élément $q \in T$ défini au point a_j et tel que

$$q(e) = r(e) = a_i, \quad (q, s) \in C, \quad q(s(a_k)) = r(s(a_k)) = a_l, \quad (qs, t) \in C,$$

ce qui établira la réciproque. L'application r est déjà définie au point e et au point $s(a_k)$. Si a_j est l'un des points e ou $s(a_k)$, on prend $q = r$. Sinon, on construit $q : \{e, s(a_k), a_j\} \rightarrow K$ en posant

$$q(e) = r(e) = a_i, \quad q(s(a_k)) = r(s(a_k)) = a_l, \quad q(a_j) = x,$$

avec un élément x soumis aux trois conditions suivantes :

- (1) $x \notin \{a_i, a_l\}$.
- (2) $x \in A_i$ si $e \in A_j$.
- (3) $x \in A_l$ si $s(a_k) \in A_j$.

Cela est possible car chacune des parties A_m de la famille possède au moins trois points. Enfin, ces conditions impliquent que l'on a bien $q \in T$.

On pourrait également vérifier à l'aide de la table de multiplication, avec un peu de patience, que l'opération est associative et reproductive.

Enfin, pour $y \in A_0 \setminus \{e\}$ et $a \in A_k$, les deux parties $e.y = A_0 \setminus \{e\}$ et $a.y = A_k \setminus \{a\}$ ne sont pas équipotentes alors qu'elles le seraient dans un D-hypergroupe. **cqfd**

On peut ainsi ranger les différentes structures $S(n, (p_i))$ dans quatre classes distinctes.

Première classe : $p_i = n$ pour tout indice i . Cela comprend, bien entendu, tous les cas où $I = \{0\}$. Toutes ces structures sont des D-hypergroupes, comme on l'a dit plus haut.

Deuxième classe : $n \geq 3$, $p_i \geq 3$ pour tout indice i et $p_k \neq n$ pour un indice k . Ces structures sont, toutes, des hypergroupes qui ne sont pas des hypergroupes de classes.

Troisième classe : $n \geq 2$ et $p_k = 1$ pour un indice k . L'un des produits est **vide** : en particulier, $A_0 = \{e, y, \dots\}$, $A_k = \{a\}$ et $a.y = \emptyset$.

Quatrième classe : tous les autres cas. Ces structures ne sont pas des hypergroupes car l'associativité est alors en défaut, comme on peut le vérifier.

Vérifications. Il n'y a que les trois cas suivants :

1. $n = 1$ et $p_k \geq 2$ pour un indice k .
2. $n = 2$ et $p_k \geq 3$ pour un indice k .
3. $n \geq 3$ et $p_k = 2$ pour un indice k .

1. On a $A_0 = \{e\}$, $A_k = \{a, b, \dots\}$ donc $a.(a.a) \neq (a.a).a$ car

$$a.(a.a) = a.(K \setminus A_k) \subset \{a\} \cup (K \setminus A_k) \not\ni b,$$

$$(a.a).a = (K \setminus A_k).a = \bigcup_{i \neq k} (K \setminus A_i) \ni b.$$

2. On a $A_0 = \{e, y\}$, $A_k = \{a, b, c, \dots\}$, donc $a.(y.y) \neq (a.y).y$ car

$$a.(y.y) = a.e = a,$$

$$(a.y).y = (A_k \setminus \{a\}).y \supset (b.y) \cup (c.y) = A_k.$$

3. On a $A_0 = \{e, y, z\}$, $A_k = \{a, b\}$ donc $a.(y.y) \neq (a.y).y$ car

$$a.(y.y) = a.\{e, z\} = A_k,$$

$$(a.y).y = b.y = a. \quad \square$$

POUR LA PETITE HISTOIRE

Les premières versions de ce texte remontent au siècle dernier (!) Très souvent remanié, il a été exposé, en partie, au Groupe de travail de théorie des nombres du Département de mathématiques de l'Université Blaise Pascal, de Clermont-Ferrand, sur invitation, le lundi 18 juin 2012, sous le titre :

«Est-il encore possible d'avancer à la manière d'Emile Mathieu ?» avec le résumé suivant :

«Courte promenade mathématique à travers champs, suivie d'un bref plaidoyer en faveur de la révision de la liste des sporadiques.»

EN GUISE DE CONCLUSION (PROVISOIRE)

On sait faire agir les hypergroupes sur des ensembles, comme on le fait pour les groupes. Plus précisément, on sait les faire agir sur l'ensemble des racines d'un polynôme. Et c'est encore une autre histoire. On peut dès lors se poser la question suivante. Est-il raisonnable, ou non, de prédire l'existence d'hypergroupes de Mathieu simples?

«À peine clos, le chantier de la classification des **groupes** simples finis devra-t-il, éventuellement, rouvrir ses portes afin d'entreprendre la classification des **hypergroupes** simples finis?»

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Eaton, J. E., Theory of cogroups, *Duke Math. J.*, 6 (1940) 101-107.
- [2] Haddad, Labib et Sureau, Yves, Les cogroupes et les D -hypergroupes, *J. Algebra*, **118** (1988) 468-476.
- [3] Haddad, Labib et Sureau, Yves, Les cogroupes et la construction de Utumi, *Pacific J. Math.*, **145** (1990) 17-58.
- [4] Krasner, M., Sur la théorie de la ramification des idéaux de corps nongaloisiens de nombres algébriques, *Acad. Belgique, Cl. Sci. Mém. Coll. 4^o*, **11**, Thèse, (1937), 110 pages.
- [5] Marty, F., Sur une généralisation de la notion de groupe, *8th. Scand. Math. Congr.*, Stockholm (1934) 45-49.
- [6] Marty, F., Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. Ser. III*, **53** (1936) 83-123.
- [7] Utumi, Yuzo, On hypergroups of group right cosets, *Osaka Math. J.*, **1** (1949) 73-80.